Pedagoški zavod Tuzla

Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona

JU Mješovita srednja škola Kalesija

BILTEN

Kantonalnog takmičenja srednjih škola iz matematike

18. April 2015. godine

Kalesija

ŠKOLA DOMAĆIN

Jedina ustanova za srednjoškolsko obrazovanje na području općine Kalesija koja nesumnjivo ima i širi značaj, jeste Srednjoškolski centar Kalesija, odnosno kako se sada zove Javna ustanova Mješovita srednja škola Kalesija.

Škola je formirana 20.4.1977. godine, odlukom o osnivanju Srednjoškolskog centra u Kalesiji Skupštine opštine Kalesija na sjednici Vijeća udruženog rada i Društveno-političkog vijeća. Izgrađena je sredstvima samodoprinosa mještana opštine Kalesija u toku akcije "hiljadu i jedna škola" i drugim donacijama.

Škola je počela sa radom kao usmjerena i imala ekonomski smjer, školu sa praktičnom obukom, a obrazovali su se i ratari i stočari. Odmah na startu, u školskoj 1978/79. godini uvode se i novi profili: bravar, zavarivač i ugostitelj-konobar. Kasnije se uvodi još obrazovnih profila: trgovački, gumarsko-plastičarski, poljoprivredni i mašinski tehničar, a izvjesno vrijeme u školi je radilo istureno odjeljenje Građevinskog školskog centra iz Tuzle. Prema tadašnjim potrebama neka su se zanimanja i gasila i zamjenjivala novim. Tako je uveden i veterinarski smjer.

U sastavu škole danas se obrazuju slijedeće zanimanja: opća gimnazija, mašinski tehničar za kompjutersko projektovanje, mašinski tehničar operater na CNC mašinama, poljoprivredni tehničar, veterinarski tehničar, ekonomski tehničar komercijalni smjer u trajanju od 4 godine, kao i automehaničar, instalater centralnog grijanja, plinski i vodoinstalater, proizvođač i monter Al i pvc stolarije, trgovac, pekar, keramičar-teracer-podopolagač, u trajanju od tri godine.

Mješovita srednja škola Kalesija danas ima 39 odjeljenja u kojima je oko 1000 učenika, koje odgaja i obrazuje oko 80 zaposlenih profesora, stručnih saradnika i ostalih uposlenika.

Da škola obrazuje dobre stručnjake govore rezultati koje učenici postižu na svim nivoima. Kako prethodni učenici koji su sada doktori nauka, profesori, dobri biznismeni, tako i sadašnji koji redovno ostvaruju zapažene rezultate. Na prvom državnom festivalu rada srednjih tehničkih i stručnih škola BiH učenici su osvojili I mjesto u kategoriji izložbe radova iz redovne nastave i osvojili prvo mjesto ekipno.

Treću nagradu na VII sajmu mladih poduzetnika u kategoriji najbolji poslovni plan, osvojili su naši učenici sa preduzećem "CRNI LABUD" sa proizvodnim planom "Alat za branje voća". Zatim naši učenici su putem vijeća učenika ušli u finalni izbor projekata OIA,na nivou BiH – "Pomozimo mladom životu" u projektu "Aktivni mladi" u organizaciji NVO OIA BiH.

Od 2000 godine u školi se implementiraju nastavni planovi i programi EU. Nastava je gotovo 100% stručno zastupljena. Školski kabineti su opremljeni najsavremenijim nastavnim sredstvima i pomagalima.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Kalesija, 18. april 2015. godine
I razred

1. Majka je triput starija od sina. Prije pet godina majka je bila pet puta starija od njega. Koliko je godina majci, a koliko sinu?

2. Neka je dat paralelogram $ABCD$ i neka je E sredina duži AB. Prave CE i BD sijeku se u tački F. Dokazati da je $CF = 2EF$.

3. Odrediti međusobnu vezu između parametara a, b i c, neovisnu o x, y, z, ako je

$$a = x + \frac{1}{x}, \quad b = y + \frac{1}{y}, \quad c = xy + \frac{1}{xy} \quad (x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0).$$

4. Odrediti sve proste brojeve p takve da je $2p^4 - p^2 + 16$ potpun kvadrat.

5. Dvije sestre, Merima i Ajla, imaju zajedničku zbirku od n znački. Na sajmu starina prodale su sve značke dobivši za svaku n KM. Kad su se vratile kući, htjele su podijeliti zaradu popola. Sav zarađeni novac je u novčanicama od 10 KM, osim ostatka pri dijeljenju iznosa zarade sa 10 koji je u kovanicama od po 1 KM. S hrpice novčanica su naizmjenice uzimale po jednu novčanicu. Budući da je Merimi, koja je uzela prvu novčanicu, dopala i posljednja novčanica, Ajla se smatrala oštećenom. Merima je onda rekla da Ajla uzme sve kovanice, a ostatak duga će joj ona vratiti sutradan. Koliko je Merima ostala dužna Ajli?

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Kalesija, 18. april 2015. godine

II razred

1. Odrediti vrijednost izraza

$$S = \left[(a+1)^{-1} + (b+1)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

za $a = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$, $b = \left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}$.

2. Ako su koeficijenti jednadžbi $x^2+p_1x+q_1=0$ i $x^2+p_2x+q_2=0$ realni i zadovoljavaju relaciju $p_1p_2 = 2\left(q_1+q_2\right)$, dokazati da bar jedna od tih jednadžbi ima realne korijene (rješenja).

3. Neka je dat oštrougli trougao ΔABC sa ortocentorm H. Tačka M je središte duži BC. Dokazati da tačka K, koja je simetrična tački H u odnosu na tačku M, leži na kružnici opisanoj oko trougla ΔABC.

4. Naći sve trojke prirodnih brojeva (x, y, z) takve da je

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = p,$$

gdje je p prost broj veći od 3.

5. Ako su a, b i c dužine stranica trougla, dokazati da je

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

Kada se dostiže znak jednakosti?

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Kalesija, 18. april 2015. godine
III razred

1. Ako je $f(x) = 3^x$ i $g(x) = \sin x$, odrediti vrijednost izraza

$$f\left(g\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) - g\left(f\left(\log_3 \pi\right)\right).$$

2. Ako za uglove trougla vrijedi relacija

$$\sin^2 \gamma = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta,$$

pokazati da je taj trougao pravougli.

3. Neka su tačke D i E podnožja visina iz vrhova B i C trougla ΔABC na stranice AC i AB, redom. Ako je M središte duži BC, dokazati da su MD i ME tangente na kružnicu opisanu oko trougla ΔADE.

4. U skupu nenegativnih cijelih brojeva riješiti jednadžbu

$$3^x + 7^y = 4^z.$$

5. Na nekom rukometnom turniru su se svaka dva tima sastala samo po jednom. Po završetku turnira prvoplasirani tim je osvojio 7 bodova, drugoplasirani 5, a trećeplasirani 3 boda. Ako se za pobjedu dobije 2 boda, za neriješen rezultat 1 bod i za poraz 0 bodova, odrediti koliko je timova učestvovalo na turniru.

****
Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA
PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLA

Takmičenje učenika srednjih škola Tuzlanskog kantona
iz MATEMATIKE
Kalesija, 18. april 2015. godine
IV razred

1. Odrediti x tako da brojevi $a+x, b+x, c+x$ čine geometrijski niz. Diskusija za različite vrijednosti parametara a, b, c!

2. Za koje prirodne brojeve n vrijedi $(1+i)^n = (1-i)^n$, gdje je i imaginarna jedinica?

3. Ako su a, b, c pozitivni brojevi takvi da je $abc = 1$, dokazati da vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{a^3+bc} + \frac{1}{b^3+ca} + \frac{1}{c^3+ab} \leq \frac{(ab+bc+ca)^2}{6}.$$

Kada se dostiže znak jednakosti?

4. U skupu prirodnih brojeva riješiti jednadžbu

$$m^n - n^m = 3.$$

5. U trouglu ΔABD poznate su ove veličine: $\measuredangle ADB = 120^\circ$ i $AD = 1$, a na stranici AB nalazi se tačka C tako da je ugao $\measuredangle ADC = 90^\circ$ i $BC = 1$. Dokazati da duž AC ima dužinu $AC = \sqrt[3]{2}$.

****

Svaki tačno urađen zadatak boduje se sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 210 minuta.

RJEŠENJA ZADATAKA

I razred

Zadatak 1. *Majka je triput starija od sina. Prije pet godina majka je bila pet puta starija od njega. Koliko je godina majci, a koliko sinu?*

Rješenje. Označimo sa m broj godina majke, a sa s broj godina sina. Prema uvjetima zadatka imamo sljedeći sistem jednadžbi:

$$\begin{aligned} m &= 3s, \\ m-5 &= 5(s-5). \end{aligned}$$

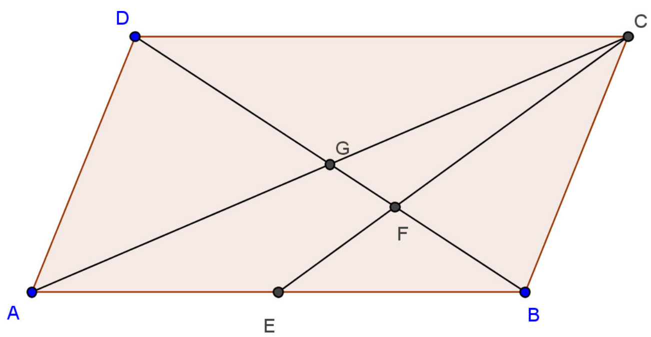
Uvrštavanjem izraza za m iz prve jednadžbe u drugu dobije se

$$3s-5=5s-25,$$

odakle je $s=10$, pa je $m=30$.

Zadatak 2. *Neka je dat paralelogram $ABCD$ i neka je E sredina duži AB. Prave CE i BD sijeku se u tački F. Dokazati da je $CF=2EF$.*

Rješenje. Neka je G tačka u kojoj se sijeku dijagonale AC i BD. Tada je $CG=GA$ i $BG=GD$. Zbog toga su BG i CE težišnice trougla ΔABC i tačka F je težište tog trougla. Poznato je da težište dijeli svaku težišnicu u odnosu $1:2$, pa je $CF=2EF$.



Zadatak 3. *Odrediti međusobnu vezu između parametara a, b i c, neovisnu o x, y, z, ako je*

$$a=x+\frac{1}{x}, \quad b=y+\frac{1}{y}, \quad c=xy+\frac{1}{xy} \quad (x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0).$$

Rješenje. Koristeći date jednakosti, imamo

$$c = xy + \frac{1}{xy} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = ab - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right),$$

odakle je

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = ab - c. \tag{1}$$

Također,

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2, \quad y^2 + \frac{1}{y^2} = b^2 - 2, \quad x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2} = c^2 - 2. \tag{2}$$

Koristeći (2), dobijamo

$$\begin{aligned} c^2 - 2 &= x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) - \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) \\ &\overset{(2)}{=} \left(a^2 - 2\right)\left(a^2 - 2\right) - \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right), \end{aligned}$$

odakle je

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = \left(a^2 - 2\right)\left(a^2 - 2\right) - \left(c^2 - 2\right). \tag{3}$$

S druge strane, iz (1) slijedi

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = (ab - c)^2 - 2. \tag{4}$$

Konačno, (3) i (4) daju

$$(ab - c)^2 - 2 = \left(a^2 - 2\right)\left(a^2 - 2\right) - \left(c^2 - 2\right),$$

odnosno traženu relaciju

$$a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4.$$

Zadatak 4. *Odrediti sve proste brojeve p takve da je $2p^4 - p^2 + 16$ potpun kvadrat.*

Rješenje. Prost broj $p = 2$ očito nije rješenje zadatka, ali $p = 3$ jeste jer je $2 \cdot 3^4 - 3^2 + 16 = 169 = 13^2$.

Neka je p prost broj veći od tri. Tada je $p = 3k + 1$ ili $p = 3k - 1$ (za neko $k \in \mathbb{N}$), odnosno imamo da je

$$p \equiv 1 \pmod 3 \quad \text{ili} \quad p \equiv -1 \pmod 3.$$

U oba ova slučaja je

$$2p^4 - p^2 + 16 \equiv 2 \cdot 1 - 1 + 16 \equiv 2 \pmod 3.$$

Međutim, poznato je da kvadrat nekog prirodnog broja ne može dati ostatak 2 pri dijeljenju sa 3 (što se jednostavno provjerava uzimajući $n = 3k, n = 3k+1$ ili $n = 3k+2$ i kvadrirajući ih).

Prema tome, jedino rješenje zadatka je $p = 3$.

Zadatak 5. *Dvije sestre, Merima i Ajla, imaju zajedničku zbirku od n znački. Na sajmu starina prodale su sve značke dobivši za svaku n KM. Kad su se vratile kući, htjele su podijeliti zaradu popola. Sav zarađeni novac je u novčanicama od 10 KM, osim ostatka pri dijeljenju iznosa zarade sa 10 koji je u kovanicama od po 1 KM. S hrpice novčanica su naizmjenice uzimale po jednu novčanicu. Budući da je Merimi, koja je uzela prvu novčanicu, dopala i posljednja novčanica, Ajla se smatrala oštećenom. Merima je onda rekla da Ajla uzme sve kovanice, a ostatak duga će joj ona vratiti sutradan. Koliko je Merima ostala dužna Ajli?*

Rješenje. Neka je $n = 10a + b, b < 10$. Ukupan novac koji su sestre dobile od prodaje je $(10a+b)^2 = 20\left(5a^2 + ab\right) + b^2$. Kako je broj novčanica bio neparan, b^2 pri dijeljenju sa 20 mora dati ostatak veći od 10 i manji od 20. jedine vrijednosti od b koje to zadovoljavaju su 4 i 6, te je b^2 jednak 16 ili 36. U oba slučaja je 6 kovanica od po 1 KM, a to znači da je Merima dobila 4 KM više, pa ukoliko vrati Ajli 2 KM, imat će jednako. Dakle, dug iznosi 2 KM.

II razred

Zadatak 1. Odrediti vrijednost izraza

$$S=\left[(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

za $a=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$, $b=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
S &= \left[(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}+1}+\frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}+1}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\frac{1}{\frac{1}{2+\sqrt{3}}+1}+\frac{1}{\frac{1}{2-\sqrt{3}}+1}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\frac{1}{\frac{3+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}+\frac{1}{\frac{3-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)}{\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\frac{6+\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}\right)^2+6-\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}\right)^2}{9-3}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{6}{6}\right)^{\frac{1}{2}}=1.
\end{aligned}$$

Zadatak 2. *Ako su koeficijenti jednadžbi $x^2+p_1x+q_1=0$ i $x^2+p_2x+q_2=0$ realni i zadovoljavaju relaciju $p_1p_2=2\left(q_1+q_2\right)$, dokazati da bar jedna od tih jednadžbi ima realne korijene (rješenja).*

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, tj. da obje od tih jednadžbi nemaju realnih rješenja. Tada bi vrijedilo

$$p_1^2-4q_1<0 \text{ i } p_2^2-4q_2<0.$$

Sabiranjem ovih nejednakosti dobijamo

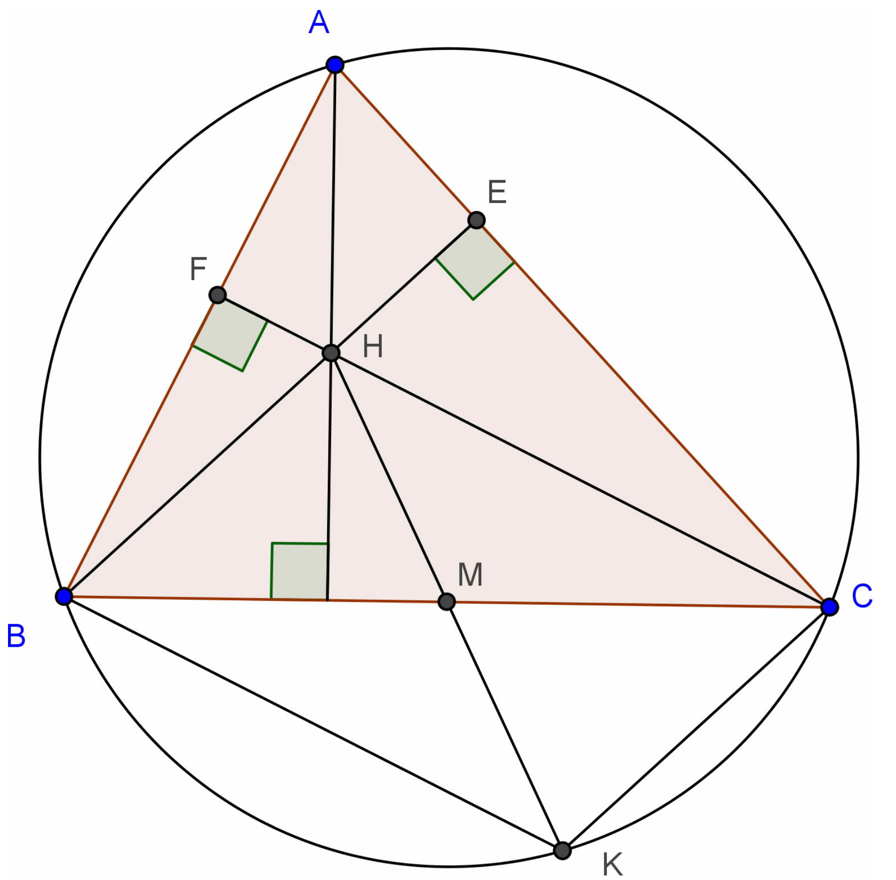
$$p_1^2+p_2^2<4\left(q_1+q_2\right).$$

No, kako je $p_1^2 + p_2^2 \geq 2p_1p_2$, imat ćemo

$$2p_1p_2 \leq p_1^2 + p_2^2 < 4\left(q_1 + q_2\right),$$

odakle slijedi $p_1p_2 < 2\left(q_1 + q_2\right)$, što je kontradikcija s pretpostavkom zadatka da je $p_1p_2 = 2\left(q_1 + q_2\right)$. To znači da nam je netačna pretpostavka da obje od tih jednadžbi nemaju realnih rješenja, tj. tačno je da barem jedna od tih jednadžbi ima realna rješenja (korijene).

Zadatak 3. *Neka je dat oštrougli trougao ΔABC sa ortocentorm H. Tačka M je središte duži BC. Dokazati da tačka K, koja je simetrična tački H u odnosu na tačku M, leži na kružnici opisanoj oko trougla ΔABC.*



Rješenje. Neka je tačka E na stranici AC podnožje visine iz vrha B, a tačka F na stranici AB podnožje visine iz vrha C. Pošto je trougao ΔABC *oštrougli, ortocentar* H se nalazi u unutrašnjosti tog trougla. Očito je onda

$$\measuredangle HFA + \measuredangle HEA = 180^\circ,$$

pa je četverougao $HEAF$ tetivni. Zbog toga je

$$\measuredangle BHC = \measuredangle EHF = 180^\circ - \measuredangle EAF = 180^\circ - \measuredangle CAB. \tag{5}$$

Prema uvjetu zadatka imamo da je $BM = MC$ i $HM = MK$, pa je četverougao $HBKC$ paralelogram (jer mu se dijagonale polove). Iz toga slijedi da je

$$\measuredangle BHC = \measuredangle BKC. \tag{6}$$

Iz (5) i (6) slijedi da je $\measuredangle BHC = 180^\circ - \measuredangle CAB$, što znači da je ičetverougao $ABKC$ tetivni četverougao. Iz toga slijedi da K leži na kružnici opisanoj oko trougla ΔABC.

Zadatak 4. *Naći sve trojke prirodnih brojeva (x, y, z) takve da je*

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = p,$$

gdje je p prost broj veći od 3.

Rješenje. Kako je

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) + z^3 - 3xyz \\ &= (x+y)^3 + z^3 - 3xy(x+y) - 3xyz \\ &= (x+y+z)\left((x+y)^2 - (x+y)z + z^2\right) - 3xy(x+y+z) \\ &= (x+y+z)\left(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx\right), \end{aligned}$$

data jednadžba se može napisati u obliku:

$$(x+y+z)\left(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx\right) = p.$$

Pošto su x, y, z prirodni brojevi, to je $x + y + z \geq 3$. Imajući na umu da je p prost broj, slijedi da je

$$x + y + z = p \text{ i } x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 1.$$

Dalje je

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 1 \Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 2,$$

odakle zaključujemo da dva od tri kvadrata na lijevoj strani moraju biti jednaka 1, a treći 0. Zbog simetričnosti jednadžbe možemo smatrati da je $x \geq y \geq z$. To znači da su moguća dva slučaja: $x = y > z$ ili $x > y = z$.

1. U slučaju kad je $x = y > z$, imamo da je $y - z = 1$, odnosno $x = y = z + 1$. Tada je

$$p = x + y + z = 3z + 2.$$

Kako je z cio broj, to je $p \equiv 2 \pmod 3$, tj. p je prost broj oblika $p = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$), pa dobijemo: $z = k, x = y = k + 1$. Drugim riječima, ako je p prost broj oblika $p = 3k + 2$

$(k \in \mathbb{N})$, tada jednadžba ima rješenje: $(x, y, z) = \left(\frac{p+1}{3}, \frac{p+1}{3}, \frac{p-2}{3}\right)$, ali i sve permutacije ove uređene trojke (zbog simetrije jednadžbe).

2. U slučaju kad je $x > y = z$, imamo da je $x - y = 1$, odnosno $x - 1 = y = z$. Tada je

$$p = x + y + z = 3x - 2.$$

Kako je x cio broj, to je $p \equiv -2 \equiv 1 \pmod 3$, tj. p je prost broj oblika $p = 3k + 1$ $(k \in \mathbb{N})$, pa dobijemo: $x = k + 1, y = z = k$. Drugim riječima, ako je p prost broj oblika $p = 3k + 1$ $(k \in \mathbb{N})$, tada jednadžba ima tačno jedno rješenje: $(x, y, z) = \left(\frac{p+2}{3}, \frac{p-1}{3}, \frac{p-1}{3}\right)$, ali i sve permutacije ove uređene trojke (zbog simetrije jednadžbe).

Zadatak 5. *Ako su a, b i c dužine stranica trougla, dokazati da je*

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

Kada se dostiže znak jednakosti?

Rješenje. Neka je $s = \frac{a+b+c}{2}$. Tada je lijeva strana date nejednakosti

$$\begin{aligned}
L &= \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{s-a} + \frac{b}{s-b} + \frac{c}{s-c}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{s-a} + 1\right) + \left(\frac{b}{s-b} + 1\right) + \left(\frac{c}{s-c} + 1\right) - 3\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s-a} + \frac{s}{s-b} + \frac{s}{s-c}\right) - \frac{3}{2} \\
&= \frac{s}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c}\right) - \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Primjenom nejednakosti između aritmetičke i harmonijske sredine $(A \geq H)$ na izraz u zagradi u posljednjoj jednakosti, dobijamo

$$\begin{aligned}
L &\geq \frac{s}{2} \cdot \frac{9}{(s-a)+(s-b)+(s-c)} - \frac{3}{2} \\
&= \frac{s}{2} \cdot \frac{9}{3s-(a+b+c)} - \frac{3}{2} = \frac{s}{2} \cdot \frac{9}{3s-2s} - \frac{3}{2} \\
&= \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 3,
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Jednakost se postiže kad u upotrijebljenoj nejednakosti$A = H$ vrijedi znak jednakosti, odnosno kad je $s - a = s - b = s - c$, tj. kad je $a = b = c$, što se i neposredno provjerava u polaznoj nejednakosti.

III razred

Zadatak 1. *Ako je* $f(x) = 3^x$ *i* $g(x) = \sin x$, *odrediti vrijednost izraza*

$$f\left(g\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) - g\left(f\left(\log_3 \pi\right)\right).$$

Rješenje. Prema uvjetima zadatka imamo:

$$\begin{aligned} f\left(g\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) - g\left(f\left(\log_3 \pi\right)\right) &= f\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) - g\left(3^{\log_3 \pi}\right) \\ &= f\left(\frac{1}{2}\right) - g(\pi) = 3^{\frac{1}{2}} - \sin\pi \\ &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Zadatak 2. *Ako za uglove trougla vrijedi relacija*

$$\sin^2\gamma = \sin^2\alpha + \sin^2\beta,$$

pokazati da je taj trougao pravougli.

Rješenje. I način: Iz sinusnog teorema

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

imamo

$$\sin\alpha = \frac{a}{2R}, \sin\beta = \frac{b}{2R}, \sin\gamma = \frac{c}{2R}.$$

Koristeći posljednje relacije imamo

$$\sin^2\gamma = \sin^2\alpha + \sin^2\beta \Leftrightarrow \frac{c^2}{4R^2} = \frac{a^2}{4R^2} + \frac{b^2}{4R^2} \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2,$$

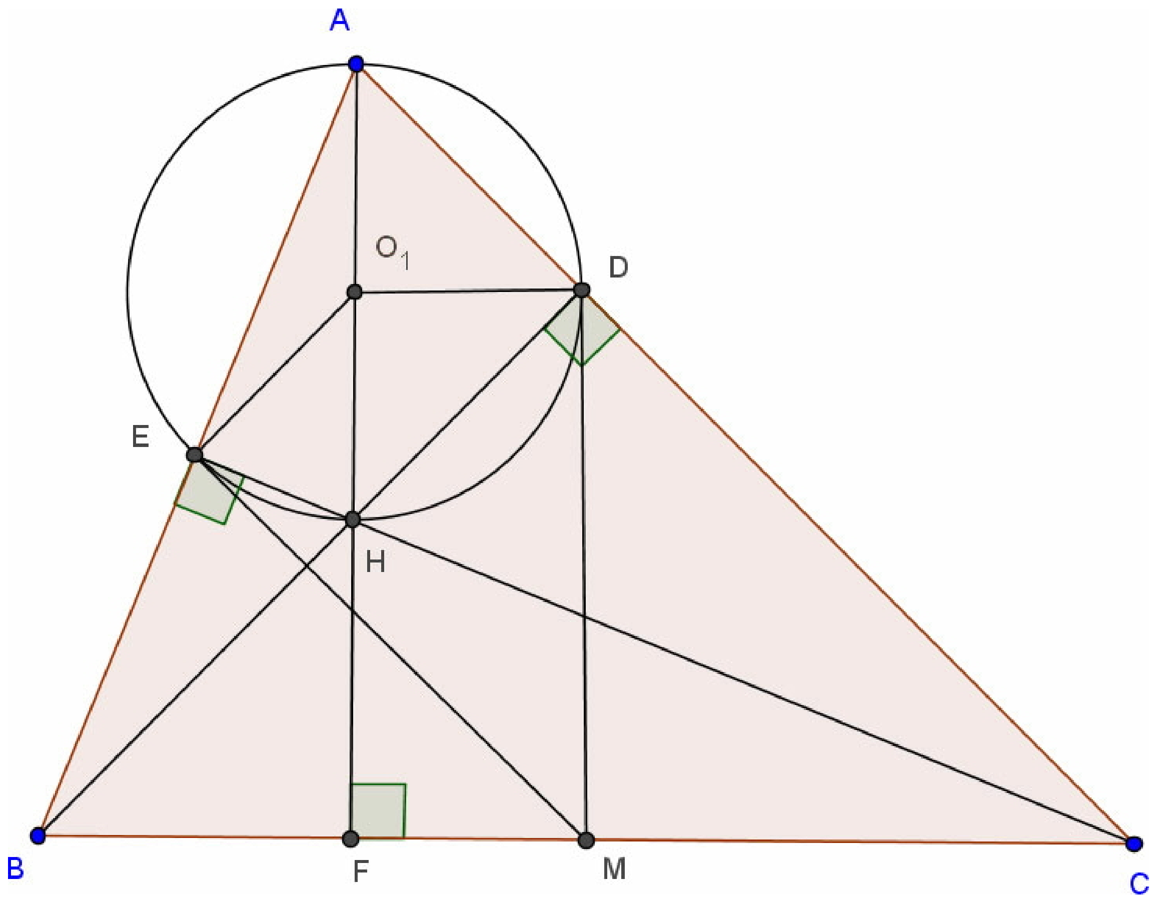
tj. trougao je pravougli.

II način: Kako je $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, imamo

$$\begin{aligned} \sin^2\gamma &= \sin^2\left(180^\circ - (\alpha+\beta)\right) = \sin^2(\alpha+\beta) = \sin^2\alpha + \sin^2\beta \\ &\Leftrightarrow \sin^2\alpha\cos^2\beta + 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta + \sin^2\beta\cos^2\alpha = \sin^2\alpha + \sin^2\beta \\ &\Leftrightarrow \sin^2\alpha\left(\cos^2\beta - 1\right) + \sin^2\beta\left(\cos^2\alpha - 1\right) + 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta = 0 \\ &\Leftrightarrow -2\sin^2\alpha\sin^2\beta + 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin\alpha\sin\beta\left(\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(\alpha+\beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha+\beta = 90^\circ, \end{aligned}$$

tj. trougao je pravougli.

Zadatak 3. *Neka su tačke D i E podnožja visina iz vrhova B i C trougla ΔABC na stranice AC i AB, redom. Ako je M središte duži BC, dokazati da su MD i ME tangente na kružnicu opisanu oko trougla ΔADE.*



Rješenje. Neka je F podnožje visine iz vrha A na stranici BC. Označimo sa H ortocentar trougla ΔABC. Imamo da je $\measuredangle BDA = \measuredangle HDA = 90^\circ$ i $\measuredangle CEA = \measuredangle HEA = 90^\circ$, iz čega slijedi da je $\measuredangle HEA + \measuredangle HDA = 180^\circ$, pa je četverougao $HEAD$ tetivni. Ako je O_1 sredina duži AH, tada je

$$O_1A = O_1H = O_1E = O_1D,$$

jer je O_1 centar opisanih kružnica oko pravouglih trouglova ΔHEA i ΔHDA. Iz toga slijedi da je O_1 centar opisane kružnice oko trougla ΔDAE. Pošto je $\measuredangle CEB = \measuredangle CDB = 90^\circ$ i to su uglovi nad istom tetivom BC, onda je četverougao $CDEB$ tetivni. Tačka M je centar opisanih kružnica u tački M oko oba pravougla trougla, ΔCEB i ΔCDB, pa je centar opisanih kružnica u tački M centar opisane kružnice oko četverougla $BCDE$. Zbog toga je

$$MD = ME = MB = MC.$$

Dalje je

$$\measuredangle HDM = \measuredangle BDM = \measuredangle DBM = 90^\circ - \measuredangle BCA = 90^\circ - \gamma \tag{7}$$

i

$$\measuredangle O_1DH = \measuredangle O_1HD = 90^\circ - \measuredangle HAD = 90^\circ - \measuredangle FAC = \measuredangle BCA = \gamma. \tag{8}$$

Iz (7) i (8) slijedi

$$\measuredangle HDM + \measuredangle O_1DH = 90^\circ \Rightarrow \measuredangle O_1DM = 90^\circ.$$

Dakle, MD je tangenta na kružnicu opsanu oko trougla ΔADE.

Analogno se dokazuje da je i ME tangenta na kružnicu opisanu oko trougla ΔADE, što je i trebalo dokazati.

Zadatak 4. *U skupu nenegativnih cijelih brojeva riješiti jednadžbu*

$$3^x + 7^y = 4^z.$$

Rješenje. Očito je da za $z = 0$ jednadžba nema rješenja (neposredno se provjerava). Neka je $z \geq 1$. Primjenom kongruencije po modulu 4 na datu jednadžbu, dobijamo

$$(-1)^x + (-1)^y \equiv 0 \pmod 4,$$

odakle slijedi da su x i y različite parnosti. Zbog toga ćemo razmatrati dva slučaja.

1) x paran, y neparan

Neka je $x = 2x_1$, gdje je $x_1 \in \mathbb{N}_0$. Zamjenom u polaznoj jednadžbi dobije se

$$7^y = (2^z)^2 - (3^{x_1})^2 = (2^z - 3^{x_1})(2^z + 3^{x_1}).$$

Odavde slijedi

$$\left.\begin{array}{l} 7^s = 2^z - 3^{x_1} \\ 7^t = 2^z + 3^{x_1} \end{array}\right\}, \tag{9}$$

gdje su $s, t \in \mathbb{N}_0$ i $s < t, s + t = y$. Sabiranjem jednakosti (9) imamo

$$2 \cdot 2^z = 7^s + 7^t = 7^s \left(1 + 7^{t-s}\right),$$

iz čega slijedi da $7^s \mid 2 \cdot 2^z$, što je moguće samo za $s = 0$, pa je $t = y$ i vrijedi

$$2^{z+1} = 1 + 7^y. \tag{10}$$

S druge strane, oduzimanjem prve od druge jednakosti u (9) dobijamo

$$2 \cdot 3^{x_1} = 7^y - 1. \tag{11}$$

Iz (10) i (11) slijedi $2^{z+1} = 2 \cdot 3^{x_1} + 2$, odnosno

$$2^z = 3^{x_1} + 1, \tag{12}$$

odakle, primjenom kongruencije po modulu 3, dobijamo

$$(-1)^z \equiv 1 \pmod 3,$$

pa je z paran broj, tj. $z = 2z_1, z_1 \in \mathbb{N}_0$. Sada iz jednadžbe (12) slijedi

$$3^{x_1} = (2^{z_1})^2 - 1 = (2^{z_1} - 1)(2^{z_1} + 1),$$

odnosno

$$\left.\begin{array}{l} 3^u = 2^{z_1} - 1 \\ 3^v = 2^{z_1} + 1 \end{array}\right\}, \tag{13}$$

gdje su $u, v \in \mathbb{N}_0$ i $u < v, u + v = x_1$. Oduzimanjem jednakosti (13) imamo

$$2 = 3^v - 3^u = 3^u \left(3^{v-u} - 1\right),$$

odakle slijedi $3^u \mid 2$, što je moguće samo za $u = 0$, pa je $v = x_1$ i vrijedi $2 = 3^{x_1} - 1$ Odavde je $x_1 = 1$ i $x = 2$, a iz (13) slijedi da je i $z_1 = 1$, pa je $z = 2$. Iz polazne jednadžbe se dobije $y = 1$.

Dakle, u ovom prvom slučaju dobili smo jedno rješenje: $(x, y, z) = (2, 1, 2)$.

2) x neparan, y paran

Neka je $y = 2y_1$, gdje je $y_1 \in \mathbb{N}_0$. Zamjenom u polaznoj jednadžbi dobije se

$$3^x = (2^z)^2 - (7^{y_1})^2 = (2^z - 7^{y_1})(2^z + 7^{y_1}),$$

odakle je

$$\left.\begin{array}{l} 3^k = 2^z - 7^{y_1} \\ 3^l = 2^z + 7^{y_1} \end{array}\right\}, \tag{14}$$

gdje su $k, l \in \mathbb{N}_0$ i $k < l, k + l = x$. Sabiranjem jednakosti (14) imamo

$$2 \cdot 2^z = 3^k + 3^l = 3^k \left(1 + 3^{l-k}\right),$$

iz čega slijedi da $3^k \mid 2 \cdot 2^z$, što je moguće samo za $k = 0$, pa je $l = x$ i vrijedi

$$2^{z+1} = 1 + 3^x. \tag{15}$$

Uočimo da je jednadžba (15) oblika (12) i da smo već dokazali da ima jedinstveno rješenje: $z + 1 = 2$ (tj. $z = 1$), $x = 1$. Neposredno iz polazne jednadžbe slijedi da je $y = 0$. Dakle, u ovom drugom slučaju dobili smo također samo jedno rješenje polazne jednadžbe: $(x, y, z) = (1, 0, 1)$.

Rezultat: Polazna jednadžba ima dva rješenja: $(1, 0, 1)$ i $(2, 1, 2)$.

Zadatak 5. *Na nekom rukometnom turniru su se svaka dva tima sastala samo po jednom. Po završetku turnira prvoplasirani tim je osvojio 7 bodova, drugoplasirani 5, a trećeplasirani 3 boda. Ako se za pobjedu dobije 2 boda, za neriješen rezultat 1 bod i za poraz 0 bodova, odrediti koliko je timova učestvovalo na turniru.*

Rješenje. Neka je n broj timova koji su učestvovali na turniru. Ukupno je odigrano $\frac{n(n-1)}{2}$ utakmica na turniru. Budući da je broj ukupno osvojenih bodova po utakmici 2, onda je ukupan broj svih osvojenih bodova na cijelom turniru jednak $n(n-1)$, a to je paran broj. Zbog toga je $n(n-1) > 7+5+3 = 15$, odakle slijedi da je $n \geq 5$.

Prema uvjetima zadatka svi ostali timovi su osvojili ili 3 ili manje bodova. Zbog toga je

$$n(n-1) \leq 15 + (n-3) \cdot 3,$$

odnosno $n^2 - 4n - 6 \leq 0$, odakle slijedi da je $n \leq 5$. Prema tome, zbog ranijeg uvjeta da je $n \geq 5$, slijedi da je $n = 5$ kao jedina mogućnost, tj. na turniru je učestvovalo ukupno pet timova.

IV razred

Zadatak 1. *Odrediti x tako da brojevi $a+x, b+x, c+x$ čine geometrijski niz. Diskusija za različite vrijednosti parametara a, b, c!*

Rješenje. Uvjet da ova tri broja čine geometrijski niz je

$$(b+x)^2 = (a+x)(c+x),$$

odnosno

$$(2b-a-c)\,x = ac-b^2.$$

Diskusija:

i) ako je $2b \neq a+c$, tada postoji jedinstveno jrešenje: $x = \dfrac{ac-b^2}{2b-a-c}$;

ii) ako je $2b = a+c$, i $ac \neq b^2$, tada ne postoji tražena vrijednost za x;

iii) ako je $2b = a+c$ i $ac = b^2$, odnsosno $a = b = c$, tada je rješenje svaki realni broj x (beskonačno mnogo rješenja).

Napomena: U slučaju i) brojevi a, b, c ne čine aritmetički niz; u slučaju ii) brojevi a, b, c čine aritmetički niz, ali ne čine geometrijski niz; a u slučaju iii) brojevi a, b, c čine istovremeno i aritmetički i geometrijski niz.

Zadatak 2. *Za koje prirodne brojeve n vrijedi $(1+i)^n = (1-i)^n$, gdej je i imaginarna jedinica?*

Rješenje. I način:

$$\begin{aligned}(1+i)^n &= (1-i)^n \Leftrightarrow \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right)^n = 1\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2i}{2}\right)^n = 1 \Leftrightarrow i^n = 1 \Leftrightarrow n = 4k,\ k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

II način: Koristeći Moivreovu formulu, budući da je

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),\quad 1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

imamo

$$\begin{aligned}(1+i)^n &= (1-i)^n \Leftrightarrow \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n = \left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n\\ &\Leftrightarrow \cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4} = \cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}\\ &\Leftrightarrow 2i\sin\frac{n\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{n\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow n = 4k,\ k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Zadatak 3. *Ako su a, b, c pozitivni brojevi takvi da je $abc = 1$, dokazati da vrijedi nejednakost*

$$\frac{1}{a^3+bc}+\frac{1}{b^3+ca}+\frac{1}{c^3+ab}\leq\frac{(ab+bc+ca)^2}{6}.$$

Kada se dostiže znak jednakosti?

Rješenje. Koristit ćemo nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine dvaju brojeva:

$$\begin{aligned}
a^3+bc &\geq 2\sqrt{a^3bc}=2a,\\
b^3+ac &\geq 2\sqrt{b^3ac}=2b,\\
c^3+ab &\geq 2\sqrt{c^3ab}=2c,
\end{aligned}$$

odakle je

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a^3+bc}+\frac{1}{b^3+ca}+\frac{1}{c^3+ab} &\leq \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\\
&= \frac{ab+bc+ca}{2}.
\end{aligned}$$

Preostaje dokazati da je

$$\frac{ab+bc+ca}{2}\leq\frac{(ab+bc+ca)^2}{6},$$

odnosno da je

$$ab+bc+ca\geq 3,$$

što slijedi iz nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine

$$ab+bc+ca\geq 3\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca}=3.$$

Znak jednakosti se dostiže za $ab = bc = ca$, odnosno za $a = b = c$, što zajedno sa $abc = 1$, daje $a = b = c = 1$. S druge strane, jednostavno se provjerava da se za $a = b = c = 1$ zaista dostiže jednakost.

Zadatak 4. *U skupu prirodnih brojeva riješiti jednadžbu*

$$m^n - n^m = 3.$$

Rješenje. Očito je da brojevi m i n moraju biti različite parnosti. Razlikujemo dva slučaja:

$*$ m je neparan, n paran

Vidimo da mora biti $m > 1$. Neka je $n = 2n_1$ za neko $n_1 \in \mathbb{N}$. Tada je

$$m^n = \left(m^2\right)^{n_1} \equiv 1^{n_1} \equiv 1 \pmod 4$$

i

$$n^m \equiv 0 \pmod 4,$$

pa je

$$m^n - n^m \equiv 1 \pmod 4,$$

a kako je desna strana jednadžbe $3 \equiv -1 \pmod 4$, zaključujemo da u ovom slučaju jednadžba nema rješenja.

$*$ m je paran, n neparan

Za $n = 1$ imamo rješenje jednadžbe $m = 4, n = 1$. Pretpostavimo sada da je $n > 1$. Tada je $n \geq 3$, pa je

$$m^n \equiv 0 \pmod 8.$$

Neka je $m = 2m_1$ za neko $m_1 \in \mathbb{N}$. Zbog toga je

$$n^m = \left(n^2\right)^{m_1} \equiv 1^{m_1} \equiv 1 \pmod 8,$$

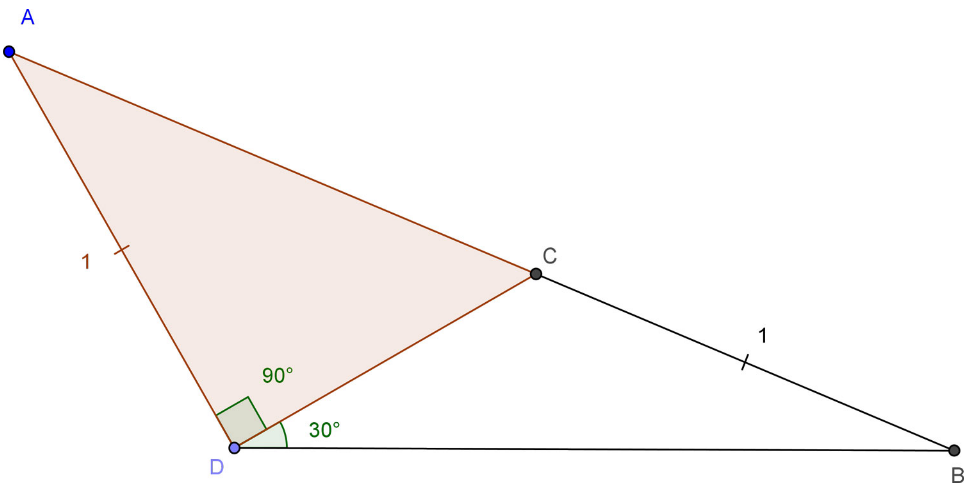
pa je

$$m^n - n^m \equiv 0 - 1 \equiv 7 \pmod 8,$$

te zaključujemo da i ovdje nema novih rješenaj, osim već dobijenog.

Rezultat: $(m, n) = (4, 1)$ je jedinstveno rješenje.

Zadatak 5. *U trouglu ΔABD poznate su ove veličine:* $\measuredangle ADB = 120^\circ$ i $AD = 1$, a na stranici AB nalazi se tačka C tako da je ugao $\measuredangle ADC = 90^\circ$ i $BC = 1$. *Dokazati da duž AC ima dužinu* $AC = \sqrt[3]{2}$.



Rješenje. Uvedimo oznake: $x = AC, y = BD$. Primjenom kosinusnog teorema na trougao ΔABD imamo

$$\begin{aligned} AB^2 &= AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cos \measuredangle ABD \\ &\Longleftrightarrow (x+1)^2 = 1 + y^2 - 2y \cos 120^\circ \Longleftrightarrow (x+1)^2 = 1 + y^2 - 2y\left(-\frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

odnosno

$$x^2 + 2x = y^2 + y. \tag{16}$$

Primjenom sinusnog teorema na trougao ΔBCD, imajući na umu da je $\measuredangle BDC = 30^\circ$, dobijamo

$$\frac{y}{\sin \measuredangle BCD} = \frac{1}{\sin 30^\circ},$$

odakle je

$$y = 2 \sin \measuredangle BCD. \tag{17}$$

U pravouglom trouglu ΔADC vrijedi

$$\sin \measuredangle ACD = \frac{1}{AC} = \frac{1}{x}. \tag{18}$$

Iz (17) i (18) slijedi

$$y = 2 \sin \measuredangle BCD = 2 \sin (180^\circ - \measuredangle ACD) = 2 \sin \measuredangle ACD = \frac{2}{x}. \tag{19}$$

Zamjenom (19) u (16) dobijamo

$$x^2 + 2x = \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x},$$

odakle je

$$x^3 (x+2) = 2 + x \Leftrightarrow (x+2)\left(x^3 - 2\right) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2},$$

što je i trebalo dokazati.

Spisak učenika prijavljenih za kantonalno takmičenje iz matematike za prvi razred

R.B.	Prezime	Ime	Škola	Profesor	Ukupno bodova	%	Zadaci Prvi	Drugi	Treći	Četvrti	Peti	Šifra učenika
1	Batalević	Adil	Međunarodna srednja škola Tuzla	Amir Mahmutović	34	68,00	10	10	0	10	4	011013
2	Kudumović	Dženeta	Međunarodna srednja škola Tuzla	Amir Mahmutović	33	66,00	10	10	2	10	1	012007
3	Kovačević	Erna	JU MSS Gracanica	Mediha Hasić	27	54,00	10	10	3	0	4	012004
4	Hrustić	Lejla	JU Gimnazija "Mustafa Novalić" Gradačac	Jadranka Mulahalilović	25	50,00	10	10	0	2	3	012003
5	Kukuruzović	Nedim	Međunarodna srednja škola Tuzla	Amir Mahmutović	23	46,00	10	1	1	10	1	012008
6	Duraković	Rabija	Međunarodna srednja škola Tuzla	Amir Mahmutović	23	46,00	10	10	0	1	2	011009
7	Lapandić	Edina	JU Gimnazija "Mustafa Novalić" Gradačac	Jadranka Mulahalilović	20	40,00	10	10	0	0	0	012009
8	Bojagić	Kanita	JU MS Elektrotehnička škola Tuzla	Selmir Dadanović	17	34,00	10	1	0	2	4	011011
9	Memić	Lejla	JU Gimnazija "Dr Mustafa Kamarić" Gračanica	Mirzeta Avdaković-Had	16	32,00	10	6	0	0	0	012012
10	Aljić	Hanija	JU Gimnazija "Dr Mustafa Kamarić" Gračanica	Mirzeta Avdaković-Had	14	28,00	10	4	0	0	0	011014
11	Hidanović	Eldar	JU MS Elektrotehnička škola Tuzla	Selmir Dadanović	14	28,00	10	1	0	2	1	011007
12	Muratović	Nedina	JU Behram-begova Medresa Tuzla	Rahmanović Jasmina	14	28,00	10	2	2	0	0	012015
13	Spahić	Arnela	JU Srednja Medicinska škola Tuzla	Vesna Mešić	14	28,00	10	3	0	1	0	011903
14	Efendić	Senad	JU KŠC "Sveti Franjo" Tuzla	Sanja Bosankić	13	26,00	10	1	2	0	0	011001
15	Pandurović	Medina	JU Srednja Medicinska škola Tuzla	Vesna Mešić	13	26,00	10	1	0	2	0	011916
16	Bajić	Amar	JU MSS Gracanica	Mediha Hasić	12	24,00	10	1	0	0	1	011018
17	Hodžić	Husein	JU Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	Žunić Selma	12	24,00	10	1	0	0	1	012001
18	Pamuković	Aldina	JU MSŠ "Hasan Kikić" Gradačac	Kovačević Mihreta	12	24,00	10	1	0	0	1	011204
19	Aljić	Muamer	JU Gimnazija Živinice	Edisa Ahmetović	11	22,00	10	1	0	0	0	011015
20	Đonlić	Senad	JU Gimnazija "Mustafa Novalić" Gradačac	Jadranka Mulahalilović	11	22,00	10	1	0	0	0	011008
21	Fajić	Merima	JU MS Elektro-Mašinska škola Lukavac	Edin Smailović	11	22,00	10	1	0	0	0	011002
22	Garašević	Vedran	JU MS Elektrotehnička škola Tuzla	Selmir Dadanović	11	22,00	10	1	0	0	0	011003
23	Hodžić	Šejla	JU MS Elektro-Mašinska škola Lukavac	Edin Smailović	11	22,00	10	1	0	0	0	012002
24	Kovačević	Igor	JU KŠC "Sveti Franjo" Tuzla	Sanja Bosankić	11	22,00	10	0	0	0	1	012005
25	Muftić	Vanesa	JU MS Elektro-Mašinska škola Lukavac	Edin Smailović	11	22,00	10	1	0	0	0	012014
26	Musić	Fata	JU Gimnazija "Dr Mustafa Kamarić" Gračanica	Mirzeta Avdaković-Had	11	22,00	10	1	0	0	0	011911
27	Okanović	Amna	JU Gimnazija Lukavac	Burgić Senada	11	22,00	10	0	0	0	1	011913
28	Oštraković	Maid	JU Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	Žunić Selma	11	22,00	10	1	0	0	0	011915

29	Požegić	Šemso	JU Srednja Medicinska škola Tuzla	Vesna Mešić	11	22,00	10	1	0	0	0	011907
30	Sakić	Merisa	JU MS Građevinsko-Geodetska škola Tuzla	Amila Osmić	11	22,00	10	1	0	0	0	011908
31	Saletović	Armela	JU Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla	Lamija Gaši	11	22,00	10	1	0	0	0	011909
32	Salkić	Jasena	JU Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla	Lamija Gaši	11	22,00	10	1	0	0	0	011910
33	Sinanović	Amila	JU MSŠ "Hasan Kikić" Gradačac	Pobrić Osman	11	22,00	10	0	0	1	0	011215
34	Smajlović	Faruk	JU Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	Žunić Selma	11	22,00	10	1	0	0	0	011902
35	Subašić	Azur	JU Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	Žunić Selma	11	22,00	10	1	0	0	0	011904
36	Tokić	Emrah	JU MSŠ "Hasan Kikić" Gradačac	Pobrić Osman	11	22,00	10	1	0	0	0	011213
37	Tokić	Sara	JU MSŠ "Hasan Kikić" Gradačac	Kovačević Mihreta	11	22,00	10	1	0	0	0	011208
38	Delić	Elmir	JU Behram-begova Medresa Tuzla	Rahmanović Jasmina	10	20,00	10	0	0	0	0	011010
39	Marijanović	Marko	JU KŠC "Sveti Franjo" Tuzla	Sanja Bosankić	10	20,00	10	0	0	0	0	012010
40	Mašić	Elmina	JU MSS Srebrenik	Mensura Salkić	10	20,00	10	0	0	0	0	012011
41	Ahmetbegović	Bakir	JU Gimnazija Živinice	Edisa Ahmetović	8	16,00	1	4	1	2	0	011901
42	Kozarević	Mešan	JU Behram-begova Medresa Tuzla	Rahmanović Jasmina	7	14,00	2	1	1	2	1	012006
43	Bašić	Lejla	JU Gimnazija Lukavac	Burgić Senada	5	10,00	1	1	2	0	1	011019
44	Nurković	Elma	JU Gimnazija Lukavac	Burgić Senada	5	10,00	2	1	2	0	0	011912
45	Arifović	Esma	JU Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla	Lamija Gaši	4	8,00	1	1	2	0	0	011016
46	Halilović	Halida	JU MSS Doboj Istok	Elmin Karić	4	8,00	1	1	2	0	0	011006
47	Okanović	Anela	JU MS Rudarska škola Tuzla	Azur Bajrović	4	8,00	1	1	2	0	0	011914
48	Zrnić	Nejra	JU MSŠ "Hasan Kikić" Gradačac	Kovačević Mihreta	4	8,00	1	1	2	0	0	011211
49	Begić	Sadmir	JU MSS Živinice	Edis Čičkušić	4	8,00	0	1	3	0	0	011012
50	Hadžić	Ibrahim	JU MS Saobraćajna škola Tuzla	Davor Mišković	4	8,00	1	0	3	0	0	011005
51	Perić	Martina	JU MS Saobraćajna škola Tuzla	Davor Mišković	4	8,00	0	1	3	0	0	011906
52	Subašić	Sanida	JU Gimnazija "Dr Mustafa Kamarić" Gračanica	Mirzeta Avdaković-Had	4	8,00	0	1	3	0	0	011905
53	Atlagić	Tarik	JU MS Saobraćajna škola Tuzla	Davor Mišković	3	6,00	0	0	3	0	0	011017
54	Suljkanović	Maid	JU MSŠ "Hasan Kikić" Gradačac	Kovačević Mihreta	3	6,00	0	0	3	0	0	011201

Spisak učenika prijavljenih za kantonalno takmičenje iz matematike za drugi razred

R.B.	Prezime	Ime	Škola	Profesor	Ukupno bodova	%	Zadaci Prvi	Drugi	Treći	Četvrt i	Peti	Šifra učenika
1	Mašić	Edis	Međunarodna srednja škola Tuzla	Amir Mahmutović	43	86,00	10	10	10	3	10	021710
2	Vićentijević	Jasmin	Međunarodna srednja škola Tuzla	Amir Mahmutović	39	78,00	8	2	10	9	10	12
3	Đonlagić	Azur	JU KŠC "Sveti Franjo"	Vedrana Matošević	34	68,00	10	9	10	4	1	021810
4	Devedžić	Dženan	JU Gimnazija "Dr Mustafa Kamarić" Gračanica	Avdaković Hadžić Mirzet	32	64,00	9	2	10	10	1	021809
5	Pirić	Harun	Međunarodna srednja škola Tuzla	Amir Mahmutović	30	60,00	10	2	1	7	10	021101
6	Brkić	Emina	Međunarodna srednja škola Tuzla	Amir Mahmutović	26	52,00	9	0	10	6	1	021806
7	Biković	Haris	JU Gimnazija Lukavac	Senada Burgić	20	40,00	10	9	0	0	1	021816
8	Žilić	Edib	JU Srednja Medicinska škola Tuzla	Vesna Mešić	15	30,00	10	3	1	0	1	021113
9	Fazlić	Husein	JU Behram-begova Medresa Tuzla	Rahmanović Jasmina	14	28,00	10	1	2	0	1	021811
10	Imamović	Alisa	JU Gimnazija "Dr Mustafa Kamarić" Gračanica	Avdaković Hadžić Mirzet	14	28,00	10	1	1	1	1	021701
11	Klačar	Alija	JU Gimnazija "Dr Mustafa Kamarić" Gračanica	Avdaković Hadžić Mirzet	14	28,00	10	1	1	2	0	021702
12	Topalović	Branko	JU KŠC "Sveti Franjo"	Vedrana Matošević	14	28,00	10	1	1	0	2	021109
13	Trumić	Emina	JU Srednja Medicinska škola Tuzla	Vesna Mešić	14	28,00	10	2	1	0	1	021110
14	Hamidović	Tarik	JU Gimnazija Lukavac	Senada Burgić	13	26,00	10	2	1	0	0	021804
15	Ibrišević	Aldin	JU Gimnazija "Dr Mustafa Kamarić" Gračanica	Avdaković Hadžić Mirzet	13	26,00	10	1	1	0	1	021805
16	Todorović	Tatjana	JU KŠC "Sveti Franjo"	Vedrana Matošević	13	26,00	10	1	1	0	1	021108
17	Barčić	Amila	JU MS Građevinsko-Geodetska škola Tuzla	Amila Osmić	12	24,00	10	1	0	0	1	021815
18	Hajrulahović	Majda	JU MSS Srebrenik	Edina Ibrahimović	12	24,00	10	1	0	1	0	021803
19	Krpić	Semir	JU Gimnazija Živinice	Edisa Ahmetović	12	24,00	10	0	1	0	1	021708
20	Okić	Muamer	JU Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	Šehanović Alma	12	24,00	10	1	0	0	1	021714
21	Omerčić	Adna	JU Srednja Medicinska škola Tuzla	Vesna Mešić	12	24,00	10	1	0	0	1	021715
22	Salkić	Sulejman	JU MSS Srebrenik	Edina Ibrahimović	12	24,00	8	1	1	1	1	021104
23	Šljivić	Mahir	JU Gimnazija Živinice	Edisa Ahmetović	12	24,00	10	0	0	1	1	021107
24	Ćasurović	Amir	JU MSS Živinice	Edis Čičkušić	11	22,00	10	0	1	0	0	021807
25	Glumčević	Adin	JU Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla	Lamija Gaši	11	22,00	10	0	0	0	1	021801
26	Redžić	Džejlana	JU Gimnazija Lukavac	Senada Burgić	11	22,00	10	0	1	0	0	021102
27	Sinanović	Amina	JU Behram-begova Medresa Tuzla	Rahmanović Jasmina	11	22,00	9	1	1	0	0	021105
28	Demirović	Lejla	JU Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla	Lamija Gaši	10	20,00	10	0	0	0	0	021808

29	Korman	Dalila	JU Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla	Lamija Gaši	10	20,00	10	0	0	0	0	021705
30	Nuhić	Benjamin	JU Gimnazija Lukavac	Senada Burgić	10	20,00	7	1	1	0	1	021713
31	Sendić	Aida	JU MSŠ "Hasan Kikić" Gradačac	Karić Selmir	10	20,00	9	0	0	0	1	021115
32	Babić	Haris	JU MSS Doboj Istok	Elmin Karić	7	14,00	2	1	3	0	1	021814
33	Hajdarbegović	Eldar	JU Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	Šehanović Alma	7	14,00	2	1	3	0	1	021802
34	Kovčić	Nermin	JU Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	Šehanović Alma	7	14,00	0	0	3	1	3	021707
35	Kuralić	Armin	JU Behram-begova Medresa Tuzla	Rahmanović Jasmina	7	14,00	1	1	0	3	2	021709
36	Avdičević	Elvir	JU Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	Šehanović Alma	6	12,00	1	0	0	3	2	021813
37	Suljić	Almedina	JU MS Rudarska škola Tuzla	Bajrović Azur	5	10,00	2	0	0	3	0	021114
38	Memić	Husejn	JU MSS Sapna	Memić Elvir	4	8,00	0	1	0	3	0	021712
39	Sakić	Esma	JU MS Građevinsko-Geodetska škola Tuzla	Amila Osmić	4	8,00	0	0	1	3	0	021103
40	Čalukocvić	Adelisa	JU MSŠ Čelić	Brkić Nermin	3	6,00	0	0	0	3	0	021217
41	Klopić	Sadeta	JU MSS Živinice	Edis Čičkušić	3	6,00	0	0	0	3	0	021703
42	Memagić	Amina	JU MSS Živinice	Edis Čičkušić	3	6,00	0	0	0	3	0	021711
43	Mujčinović	Merima	JU MSŠ "Hasan Kikić" Gradačac	Karić Selmir	3	6,00	0	0	0	3	0	021116
44	Mujčinović	Adisa	JU MSŠ Čelić	Brkić Nermin	3	6,00	0	0	0	3	0	021206

Spisak učenika prijavljenih za kantonalno takmičenje iz matematike za treći razred

R. B.	Prezime	Ime	Škola	Profesor	Ukupno bodova	%	Zadaci Prvi	Drugi	Treći	Četvrti	Peti	Šifra učenika
1	Selimović	Almedin	Međunarodna srednja škola Tuzla	Amir Mahmutović	44	88,00	9	10	10	10	5	032015
2	Jupić	Hajrudin	Međunarodna srednja škola Tuzla	Amir Mahmutović	33	66,00	10	10	1	10	2	031007
3	Hašimbegović	Lejla	JU MSS Gracanica	Mediha Hasić	27	54,00	10	10	2	5	0	031010
4	Hasić	Albina	JU MSS Srebrenik	Mensura Salkić	26	52,00	10	10	1	5	0	031011
5	Mujičič	Ibrahim	JU Gimnazija Živinice	Edisa Ahmetović	25	50,00	10	10	1	4	0	032004
6	Hodžić	Edina	Međunarodna srednja škola Tuzla	Amir Mahmutović	23	46,00	10	3	0	10	0	031009
7	Palavrić	Armin	JU Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	Ilvana Hasanović	23	46,00	8	10	1	4	0	032012
8	Avdić	Emira	JU Gimnazija "Dr Mustafa Kamarić" Gračanic	Mehić Selma	22	44,00	10	9	1	2	0	031014
9	Ibrišević	Armin	JU Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	Ilvana Hasanović	22	44,00	10	10	1	1	0	031003
10	Sekić	Vildana	JU MSS Srebrenik	Mensura Salkić	22	44,00	10	10	1	1	0	032014
11	Hadžić	Haris	JU Gimnazija "Dr Mustafa Kamarić" Gračanic	Mehić Selma	21	42,00	10	10	1	0	0	031013
12	Omerašević	Berina	JU Gimnazija "Dr Mustafa Kamarić" Gračanic	Mehić Selma	21	42,00	10	10	1	0	0	032009
13	Plavšić	Selma	JU MSS Srebrenik	Mensura Salkić	21	42,00	10	10	0	1	0	032013
14	Bungur	Aida	JU Gimnazija "Mustafa Novalić" Gradačac	Subašić Alen	18	36,00	10	0	1	5	2	031018
15	Bristrić	Medina	JU Gimnazija "Mustafa Novalić" Gradačac	Subašić Alen	17	34,00	10	0	1	1	5	031017
16	Muratović	Emir	JU Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	Ilvana Hasanović	15	30,00	9	2	3	1	0	032007
17	Okanović	Ilma	JU Gimnazija Lukavac	Mediha Terzić	13	26,00	10	0	1	2	0	032008
18	Stjepić Ćosić	Valentin	JU MSŠ Elektrotehnička škola Tuzla	Kamber Elvira	13	26,00	10	0	1	2	0	031907
19	Begunić	Mirza	JU KŠC "Sveti Franjo" Tuzla	Sanja Bosankić	12	24,00	10	1	1	0	0	031016
20	Đonlagić	Mirzeta	JU MSS Doboj Istok	Elmin Karić	12	24,00	10	1	1	0	0	031019
21	Haseljić	Eldar	JU Gimnazija "Mustafa Novalić" Gradačac	Subašić Alen	12	24,00	9	0	1	2	0	031012
22	Hadžić	Larisa	JU Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla	Lamija Gaši	12	24,00	10	0	1	1	0	031001
23	Memić	Džemil	JU MSS Sapna	Memić Elvir	12	24,00	1	10	0	1	0	032001
24	Spahić	Umihana	JU Gimnazija "Dr Mustafa Kamarić" Gračanic	Mehić Selma	12	24,00	10	0	1	1	0	031912
25	Šehović	Dario	JU KŠC "Sveti Franjo" Tuzla	Sanja Bosankić	12	24,00	10	0	1	1	0	031913
26	Bajramović	Mahir	JU Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	Ilvana Hasanović	11	22,00	0	10	1	0	0	031015
27	Hodžić	Mirza	JU MSS Doboj Istok	Elmin Karić	11	22,00	10	0	1	0	0	031002
28	Imamović	Faruk	JU Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	Ilvana Hasanović	11	22,00	6	3	1	1	0	031005

29	Kopić	Merima	JU MSŠ Banovići	Vehabović Samira	11	22,00	9	1	1	0	0	031905
30	Muratović	Edin	JU MS Građevinsko-Geodetska škola Tuzla	Amila Osmić	9	18,00	8	0	1	0	0	032006
31	Osmanović	Dina	JU MSS Kalesija	Bećir Aljić	9	18,00	8	0	1	0	0	031903
32	Mujčić	Belma	JU Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla	Lamija Gaši	7	14,00	0	5	1	1	0	032003
33	Aljić	Adnan	JU MSŠ Elektrotehnička škola Tuzla	Kamber Elvira	6	12,00	1	1	1	2	1	031908
34	Trumić	Muhamed	JU MSŠ Elektrotehnička škola Tuzla	Kamber Elvira	6	12,00	3	0	1	2	0	031906
35	Iličić	Anita	JU Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla	Lamija Gaši	5	10,00	3	1	1	0	0	031004
36	Mujanović	Ajdin	JU MS Rudarska škola Tuzla	Emina Demirović	4	8,00	1	3	0	0	0	032002
37	Osmanović	Mirza	JU MS Rudarska škola Tuzla	Emina Demirović	4	8,00	3	0	1	0	0	032011
38	Husić	Emina	JU MSŠ Banovići	Mekić Edis	3	6,00	3	0	0	0	0	031901
39	Imamović	Mevludin	JU MS Rudarska škola Tuzla	Emina Demirović	3	6,00	3	0	0	0	0	031006
40	Muminović	Jasmina	JU MS Rudarska škola Tuzla	Emina Demirović	3	6,00	3	0	0	0	0	032005
41	Skokić	Mehmed	JU MS Saobraćajna škola Tuzla	Irvela Kerić	3	6,00	3	0	0	0	0	031911

Spisak učenika prijavljenih za kantonalno takmičenje iz matematike za četvrti razred

R.B.	Prezime	Ime	Škola	Profesor	Ukupno bodova	%	Zadaci Prvi	Drugi	Treći	Četvrti	Peti	Šifra učenika
1	Arnaut	Mirza	JU Gimnazija "Dr Mustafa Kamarić" Gračanica	Halidović Amela	48	96,00	8	10	10	10	10	041814
2	Nurkanović	Ajla	JU Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	Karać Nevzeta	38	76,00	10	10	8	2	8	041702
3	Abdulahović	Adnan	JU MSŠ Teočak	Mehić Bešlaga	20	40,00	4	10	4	0	2	041812
4	Nakičević	Ajdin	JU Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	Karać Nevzeta	20	40,00	4	10	5	1	0	041701
5	Tankić	Mahira	JU Gimnazija "Mustafa Novalić" Gradačac	Jadranka Mulahalilović	17	34,00	6	0	1	0	10	041707
6	Dedić	Muhamed	JU Gimnazija "Dr Mustafa Kamarić" Gračanica	Halidović Amela	17	34,00	5	0	9	0	3	041806
7	Čizmić	Adis	JU MSS Srebrenik	Edina Ibrahimović	15	30,00	6	0	0	1	8	041816
8	Muminović	Emina	JU Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	Karać Nevzeta	13	26,00	6	2	1	2	2	041709
9	Omerbegović	Belma	JU Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	Karać Nevzeta	13	26,00	4	5	1	1	2	041703
10	Jukić	Džemal	JU MSS Srebrenik	Edina Ibrahimović	11	22,00	3	0	6	2	0	041801
11	Podgorčević	Enver	JU Gimnazija Živinice	Edisa Ahmetović	9	18,00	6	3	0	0	0	041706
12	Karić	Arijan	JU MS Elektrotehnička škola Tuzla	Enisa Bećirović	8	16,00	5	0	0	2	1	041803
13	Gvozden	Amra	JU MSS Srebrenik	Edina Ibrahimović	7	14,00	6	0	0	0	1	041808
14	Huskić	Faruk	JU Gimnazija Lukavac	Kovačević Vujanović Melika	7	14,00	4	0	2	0	1	041810
15	Oštraković	Mirsad	JU Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	Karać Nevzeta	7	14,00	4	0	0	0	3	041705
16	Mamić	Azra	JU Gimnazija Živinice	Edisa Ahmetović	6	12,00	3	0	2	0	1	041804
17	Omerović	Ajdin	JU Gimnazija "Mustafa Novalić" Gradačac	Jadranka Mulahalilović	6	12,00	4	0	0	1	1	041704
18	Imamović	Suada	JU MSS Kalesija	Bećir Aljić	5	10,00	3	0	1	0	1	041811
19	Altumbabić	Zlatan	JU KŠC "Sveti Franjo" Tuzla	Vedrana Matošević	4	8,00	0	2	1	0	1	041813
20	Čanić	Davor	JU KŠC "Sveti Franjo" Tuzla	Matošević Vedrana	4	8,00	0	0	1	0	3	041708
21	Hasić	Edin	JU MSS Gracanica	Mediha Hasić	4	8,00	0	0	0	0	4	041809
22	Gušić	Seid	JU MS Građevinsko-Geodetska škola Tuzla	Amila Osmić	3	6,00	0	0	1	0	2	041807
23	Kamberović	Asmir	JU MS Saobraćajna škola Tuzla	Halid Puzić	3	6,00	0	0	0	1	2	041802